ФИЗИКО – МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР - 2025. МАТЕМАТИКА.

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ, КРИТЕРИИ

Вариант 5

1. Решите неравенство $\frac{2\cdot\sqrt{2x-3}}{2x-5} \geq \frac{\sqrt{2x-3}}{x+1}$.

Решение:

$$\frac{2\cdot\sqrt{2x-3}}{2x-5} \geq \frac{\sqrt{2x-3}}{x+1} \Rightarrow \frac{2\cdot\sqrt{2x-3}}{2x-5} - \frac{\sqrt{2x-3}}{x+1} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{2x-3}\cdot\left(\frac{2}{2x-5} - \frac{1}{x+1}\right) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{2x-3}\cdot\frac{2x+2-2x+5}{(2x-5)\cdot(x+1)} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{2x-3}\cdot\frac{7}{(2x-5)\cdot(x+1)} \geq 0$$

Получившееся неравенство равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{2x-3}=0\\(2x-5)\cdot(x+1)\neq 0\end{cases}\\ \begin{cases}2x-3>0\\(2x-5)\cdot(x+1)>0\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{3}{2}\\ \begin{cases}x>\frac{3}{2}\\x\in(-\infty,-1)\cup(\frac{5}{2},+\infty)\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{3}{2}\\x\in(\frac{5}{2},+\infty)\end{array}\right. \Rightarrow \quad x\epsilon \left\{\frac{3}{2}\right\}\cup\left(\frac{5}{2},\ +\infty\right).$$

Так же получившееся неравенство $\sqrt{2x-3}\cdot\frac{7}{(2x-5)\cdot(x+1)} \geq 0$ можно решить, применяя метод интервалов.

Ответ: $x\epsilon \left\{\frac{3}{2}\right\}\cup\left(\frac{5}{2},\ +\infty\right)$.

Критерии оценивания задания 1

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное обоснованное решение, при котором получен правильный ответ
6	Верно получен ответ, отличающийся от правильного исключением точки $\frac{3}{2}$
5	Получен неверный ответ из-за **одной** вычислительной ошибки, существенно не повлиявшей на ответ, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения
4	Получен неверный ответ из-за вычислительных ошибок, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения
3	Верно выполнены все действия, приводящие к определению промежутков (метод интервалов или совокупность систем), учтена область определения неравенства, но множество значений для ответа выбрано неверно (в результате ошибки в знаках и т.п.)
2	Сделан верный переход от исходного неравенства к дробно рациональному неравенству или совокупности систем, учтена область определения неравенства, но дальнейшее решение неверно или отсутствует
1	При решении неравенства в ответ включены точки, не входящие в область допустимых значений неравенства
0	Решение отсутствует ИЛИ решение неверное, продвижения отсутствуют

2. Вычислите значение выражения $\sqrt{\frac{(\sqrt{a})^3+(\sqrt{b})^3}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{ab}} : \left(\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)$ при условии, что $0 < a < b$.

Решение: $\sqrt{\frac{(\sqrt{a})^3+(\sqrt{b})^3}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{ab}} : \left(\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right) =$

$$= \sqrt{\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot\left((\sqrt{a})^2 - \sqrt{a}\cdot\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{ab}} : \left(\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right) =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{a}\right)^2 - \sqrt{a}\cdot\sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2 - \sqrt{ab}} : \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = \sqrt{\left(\sqrt{a}\right)^2 - 2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2} : \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2} : \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = \left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right| : \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) \underbrace{=}_{\text{т.к.} a<b} \left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right) : \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = -1.$$

Ответ: -1.

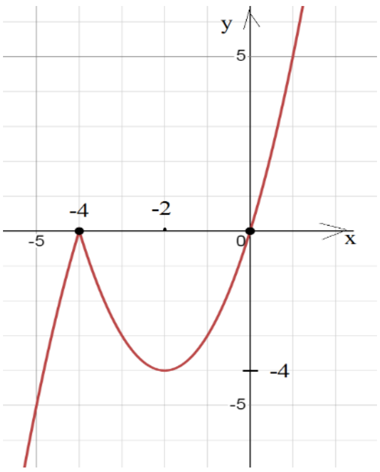
Критерии оценивания задания 2

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное обоснованное решение, при котором получен правильный ответ
6	Получен правильный ответ, но решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений
5	Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, существенно не повлиявшей на ответ, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения, в частности верно применена формулы сокращенного умножения для разности квадратов и кубов двух чисел, выделен полный квадрат в подкоренном выражении и есть попытка извлечения квадратного корня, но не учтены условия на a и b
4-1	Ответ не получен или получен неверный ответ, но имеются следующие продвижения в решении (за каждый пункт +1 балл): - верно применена формула сокращенного умножения для разности квадратов двух чисел - верно упрощена дробь $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; - верно применена формула сокращенного умножения для суммы/разности кубов двух чисел - верно упрощена дробь $\frac{\left(\sqrt{a}\right)^3+\left(\sqrt{b}\right)^3}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$
0	Решение отсутствует ИЛИ решение неверное, продвижения отсутствуют

3. Найти все значения a, при которых уравнение $x\cdot|x+4| = 3a$ имеет единственное решение.

Решение:

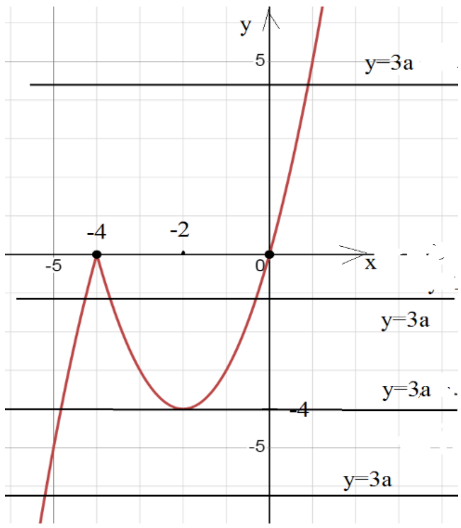
Решим уравнение графически. Рассмотрим графики функций $y = x\cdot|x+4|$ и $y = 3a$. Решения уравнения – это точки пересечения графиков функций.



1. $y = x\cdot|x+4| = \begin{cases} x(x+4), & x \geq -4 \\ x(-x-4), & x < -4 \end{cases} = \begin{cases} (x+2)^2 - 4, & x \geq -4 \\ -(x+2)^2 + 4, & x < -4 \end{cases}$

График:

2. $y = 3a$ – в зависимости от значений a прямые, параллельные оси OX.



Уравнение $x\cdot|x+4| = 3a$ имеет единственное решение, если $3a > 0$ или $3a < -4 \Rightarrow$

$a \in \left(-\infty, -\frac{4}{3}\right) \cup (0, +\infty)$.

Возможно аналитическое решение задачи.

Ответ: $a \in \left(-\infty, -\frac{4}{3}\right) \cup (0, +\infty)$.

Критерии оценивания задания 3

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное обоснованное решение (графически или аналитически), при котором получен правильный ответ
6 -5	Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки/ошибок, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения (ошибки в формулах для квадратичной функции, построении ее графика, при решении квадратных уравнений не являются вычислительными ошибками).
4 -3	Верно получен один из промежутков для значений параметра a, т.е. верно построена часть графика квадратичной функции в одном из случаев раскрытия модуля или аналитически верно рассмотрен один из случаев раскрытия модуля
3	Получен неверный ответ из-за ошибок в формулах для квадратичной функции, построении графика или при решении квадратных уравнений, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения
2-1	Верно указано кусочное задание квадратичной функции, но график не построен или построен неверно или дальнейшее решение/продвижение отсутствует
0	Решение отсутствует или решение неверное, продвижения отсутствуют.

4. Из трех различных отличных от нуля цифр a, b, c всевозможными перестановками составили шесть трехзначных чисел. Сумма этих чисел оказалась равна 1998. Найдите все наборы цифр a, b, c, если известно, что среди этих цифр встречаются только нечетные цифры.

Решение:

Из трех различных отличных от нуля цифр a, b, c всевозможными перестановками получаются следующие трехзначные числа: $\overline{abc}$, $\overline{acb}$, $\overline{bac}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$, $\overline{cba}$.

Трехзначное число можно представить в виде $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, тогда сумма этих шести трехзначных чисел будет равна

$$\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba} = (100a + 10b + c) + (100a + 10c + b) +$$

$$+(100b + 10a + c) + (100b + 10c + a) + (100c + 10a + b) + (100c + 10b + a) =$$

$$= 200 \cdot (a + b + c) + 20 \cdot (a + b + c) + 2 \cdot (a + b + c) = 222 \cdot (a + b + c).$$

С другой стороны, сумма этих шести трехзначных чисел равна 1998, тогда получаем уравнение:

$$222 \cdot (a + b + c) = 1998 \;\; \Rightarrow \;\; a + b + c = 9.$$

Так как цифры a, b, c различные, отличные от нуля, то равенство $a + b + c = 9$ возможно только, если это набор из цифр $\{1, 3, 5\}$.

Ответ: $\{1, 3, 5\}$.

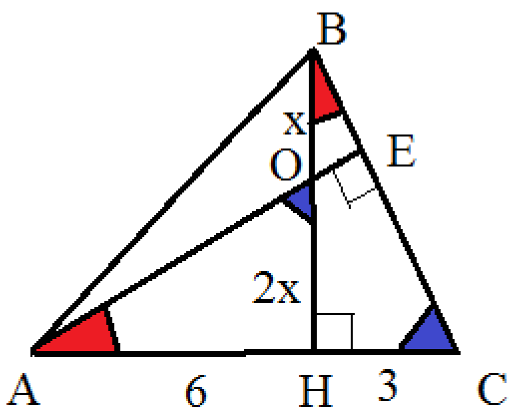
Критерии оценивания задания 4

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное обоснованное решение, при котором получен правильный ответ
6	Получен правильный ответ, но решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений

5 - 4	Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки/ошибок, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения (верно записана десятичная запись трехзначного числа, найдена сумма шести трехзначных чисел, верно составлено уравнение)
3 - 1	Ответ не получен или получен неверный ответ, но имеются продвижения в решении (за каждый пункт +1 балл): - верно записана десятичная запись трехзначного числа; - верно найдена сумма шести трехзначных чисел через цифры a, b, c; - верно составлено уравнение
1	Дан только верный ответ, решение не обосновано или не приведено
0	Решение отсутствует ИЛИ решение неверное, продвижения отсутствуют

5. Высота BH треугольника ABC разбивает сторону AC на отрезки $AH = 6$ и $CH = 3$. Найдите длину высоты BH, если известно, что другая высота треугольника, проведенная из вершины A, делит отрезок BH в отношении $1:2$, считая от точки B.

Решение:



1. Проведем из вершины A высоту AE, точка O - пересечение высот BH и AE $\Rightarrow$ по условию задачи $BO:OH = 1:2$, тогда обозначим $BO = x$, а $OH = 2x$ $\Rightarrow$ $BH = 3x$.
2. В прямоугольных треугольниках $\Delta\, AEC$ и $\Delta\, BHC$ угол $\angle$ C – общий $\Rightarrow$ $\angle\, CAE = \angle\, CBH$ $\Rightarrow$ в прямоугольных треугольниках $\Delta\, AOH$ и $\Delta\, BCH$ $\angle\, AOH = \angle\, BCH$.
3. Из пункта 2 следует, что $\Delta\, AOH \sim \Delta\, BCH$ по двум углам.
4. Из подобия $\Delta\, AOH \sim \Delta\, BCH$ следует, что

$\frac{AH}{BH} = \frac{OH}{HC} \Rightarrow \frac{6}{3x} = \frac{2x}{3} \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3} \Rightarrow BH = 3x = 3\sqrt{3}$.

Ответ: $3\sqrt{3}$.

Критерии оценивания задания 5

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное обоснованное решение, при котором получен правильный ответ
6 -5	Обоснованно получен правильный ответ, но решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений
4	Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ из-за подмены условий задачи (расстановка точек на стороне AC треугольника и/или высоте BH), **но** при этом имеется верная последовательность всех шагов решения (неверное применение подобия треугольников и нахождение отношений для сторон подобных треугольников – не являются вычислительными ошибками)
3	Получен неверный ответ из-за из-за подмены условий задачи (расстановка точек на стороне AC треугольника и/или высоте BH), **но** при этом имеется верная последовательность всех шагов решения (неверное применение подобия треугольников и нахождение отношений для сторон подобных треугольников – не являются вычислительными ошибками)
3- 1	Ответ не получен или получен неверный ответ, но имеются продвижения в решении (за каждый пункт +1 балл): - доказано подобие треугольников; - верно записано отношение для сторон подобных треугольников; - верно составлено уравнение для поиска неизвестной величины
1	Имеются некоторые продвижения в решении, но преобразования и выводы содержат существенные ошибки или не доведены до конца
0	Решение отсутствует ИЛИ Решение неверное, продвижения отсутствуют

Вариант 6

(Критерии оценивания такие же, как для варианта 5)

1. Решите неравенство $\frac{\sqrt{4-3x}}{x-3} \geq \frac{3 \cdot \sqrt{4-3x}}{3x+1}$.

Ответ: $x \epsilon \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup \left\{\frac{4}{3}\right\}$.

2. Вычислите значение выражения $\sqrt{\frac{\left(\sqrt{b}\right)^3 - \left(\sqrt{a}\right)^3}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} - 3\sqrt{ab}} : \left(\frac{b-a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}\right)$ при условии, что $0 < b < a$.

Ответ: -1.

3. Найти все значения a, при которых уравнение $x \cdot |x-4| = 5a$ имеет единственное решение.

Ответ: $a \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{4}{5}, +\infty\right)$.

4. Из трех различных отличных от нуля цифр a, b, c всевозможными перестановками составили шесть трехзначных чисел. Сумма этих чисел оказалась равна 2442. Найдите все наборы цифр a, b, c, если известно, что среди этих цифр встречаются только нечетные цифры.

Ответ: $\{1, 3, 7\}$.

5. Высота BH треугольника ABC разбивает сторону AC на отрезки $AH = 3$ и $CH = 6$. Найдите длину высоты BH, если известно, что другая высота треугольника, проведенная из вершины A, делит отрезок BH в отношении $2:1$, считая от точки B.

Ответ: $3\sqrt{6}$.