Югорский физико-математический лицей

В.П. Чуваков

Ускользающая парабола

или
задачи, сводящиеся
к квадратичным

Учебно-методическое пособие

Ханты-Мансийск
2017

В.П. Чуваков

Ускользающая парабола или задачи, сводящиеся к квадратичным: Учебно-методическое пособие, Ханты-Мансийск: Югорский физико-математический лицей, 28 с.

В пособии рассматриваются задачи повышенного уровня сложности с параметрами, сводящиеся к квадратичным. Подобные задачи часто встречаются на вступительных экзаменах в серьезные вузы и на ЕГЭ.

Для некоторого класса задач сведение к квадратичным происходит за один шаг (замена переменных и начальных условий), для других - сведение к квадратичным целое искусство, требующее больших усилий и математического изящества.

Сведения о квадратичных функциях и задачах, сводящихся к исследованиям квадратичных функций, можно найти в работах [1 – 10].

Пособие предназначено для подготовки к предметным и вузовским олимпиадам по математике и Единому государственному экзамену.

Адресовано школьникам старших классов и преподавателям.

1. **Основные сведения о квадратичной функции**

Квадратным трехчленом называется выражение вида, $f(x)=ax^2+bx+c$, $D=b^2-4ac$ – дискриминант квадратного трехчлена.

1. Выделение «полного квадрата»

$$ax^2+bx+c= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

2. График квадратного трехчлена – парабола с вершиной в точке $(x_b\,;y_b)=\left(-\frac{b}{2a};-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)=\left(\frac{-b}{2a};\frac{-D}{4a}\right)$.

3. График функции пересекается с осью OY в точке $y_0=f(0)=c$.

4. Если $a>0$, то функция $f(x)=ax^2+bx+c$ монотонно убывает на интервале $(-\infty;x_b]$ и монотонно возрастает на интервале $[x_b\,;\infty)$.

5. Если $a<0$, то функция $f(x)=ax^2+bx+c$ монотонно возрастает на интервале $(-\infty;\,x_b\,]$ и монотонно убывает на интервале $[\,x_b\,;\infty)$.

6. Если $a>0$, то $ax^2+bx+c\geq\frac{4ac-b^2}{4a}$ для любого $x\in R$.

7. Если $a<0$, то $ax^2+bx+c\leq\frac{4ac-b^2}{4a}$ для любого $x\in R$.

8. Парабола $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$ симметрична относительно оси $x=x_b=\frac{-b}{2a}$.

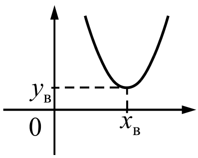
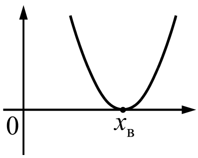
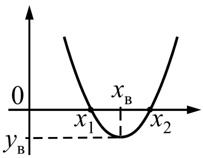
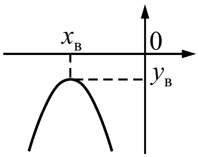
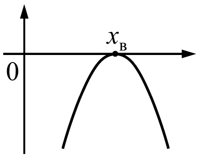
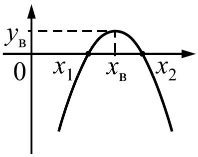
9. Корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$.

- Если $D<0$, то уравнение не имеет корней;
- Если $D=0$, то имеет один корень $x_1=\frac{-b}{2a}$,

- Если $D > 0$, то два различных корня $x_1, x_2 = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

110. $x_2 - x_1 = \dfrac{\sqrt{D}}{a}$

11. Графическая интерпретация теоремы о существование корней.

$a > 0$		
 $D < 0$ (нет корней)	 $D = 0$ (один корень)	 $D > 0$ (два корня)
$a < 0$		
 $D < 0$ (нет корней)	 $D = 0$ (один корень)	 $D > 0$ (два корня)

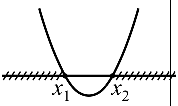
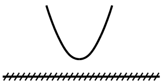
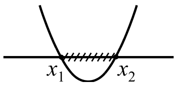
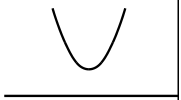
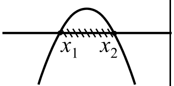
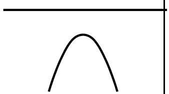
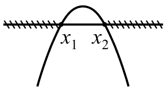
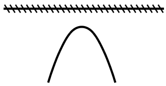
11. Теорема Виета. $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

12. Обратная теорема Виета: Если числа x_1, x_2 удовлетворяют соотношениям $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$, то x_1, x_2 являются корнями приведенного уравнения $x^2 + px + q = 0$.

13. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

15. Корни x_1, x_2 одного знака, если $D>0,\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} > 0.$ Если $\dfrac{-b}{a} = x_1 + x_2 > 0$, то оба корня положительны, а если $\dfrac{-b}{a} = x_1 + x_2 < 0$, то оба корня отрицательны.

14. Решение квадратных неравенств и их графическая интерпретация

	$ax^2+bx+c>0$		$ax^2+bx+c<0$	
	$D>0$	$D<0$	$D>0$	$D<0$
$a>0$	 $x<x_1$ $x>x_2$	 $x \in R$	 $x_1<x<x_2$	 нет решений
$a<0$	 $x_1<x<x_2$	 нет решений	 $x<x_1$ $x>x_2$	 $x \in R$

16. Используя теорему Виета, можно вычислять некоторые симметрические выражения от корней, не находя самих корней.

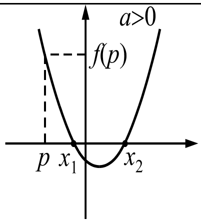
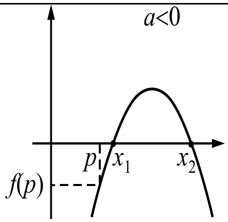
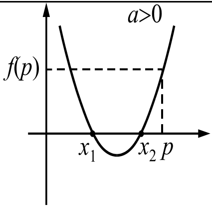
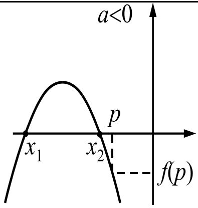
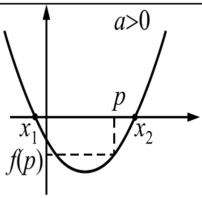
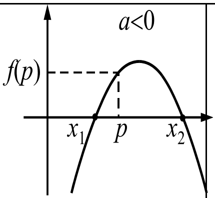
Например: $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1+x_2}{x_1 x_2}$, $x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2$, ,

$(x_1 - x_2)^2 = (x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2.$

$x_1^3 + x_2^3 = (x_1+x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (x_1+x_2)((x_1+x_2)^2 - 3x_1x_2),$

$\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2},\quad \dfrac{1}{x_1^3} + \dfrac{1}{x_2^3}.$

18. Расположение корней квадратного уравнения и их графическая интерпретация

<table>
<tr><td colspan="4">Вопрос: Оба корня больше числа p</td></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>$\begin{cases} a>0 \\ D>0 \\ x_b=\dfrac{-b}{2a}>p \\ f(p)>0 \end{cases}$</td>
<td>$\begin{cases} a<0 \\ D>0 \\ x_b=\dfrac{-b}{2a}>p \\ f(p)<0 \end{cases}$</td>
</tr>
<tr><td colspan="4">Вопрос: Оба корня меньше числа p</td></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>$\begin{cases} a>0 \\ D>0 \\ x_b=\dfrac{-b}{2a}<p \\ f(p)>0 \end{cases}$</td>
<td>$\begin{cases} a<0 \\ D>0 \\ x_b=\dfrac{-b}{2a}<p \\ f(p)<0 \end{cases}$</td>
</tr>
<tr><td colspan="4">Вопрос: Число p находится между корнями</td></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>$\begin{cases} a>0 \\ f(p)<0 \end{cases}$</td>
<td>$\begin{cases} a<0 \\ f(p)>0 \end{cases}$</td>
</tr>
</table>

В данном пособии рассматриваются задачи из [1-10] и авторские задачи.

2. Решение задач с помощью замены переменных

Алгоритм решения:
- сделайте замену переменных;
- сформулируйте условие задачи для новой переменной;
- сведите исходную задачу к классической задаче на квадратичную функцию с новыми условиями и решите ее;
- вернитесь к исходным переменным и запишите ответ.

Некоторые варианты замены переменных:

$y = a^x \, (y > 0)$, $\quad a^{|x|} = y \, (y > 1$ при $a > 1$, $y < 1$ при $a < 1)$,

$y = \sin x, y = \cos x \; (|y| \le 1)$, $\; a^{-|x|} = y \, (0 < y < 1)$, $\; y = \sqrt{x} \; (y \ge 0)$,

$y = x^2 \; (y \ge 0)$, $\log_a \sin x = y \, (y < 0$ при $a > 1$, $y > 0$ при $a < 1)$,

$y = \sin x \cdot \cos x \, (-0{,}5 \le y \le 0{,}5)$, $\quad a^{\sin x} = y \left(a > 1 \Rightarrow \dfrac{1}{a} < y < a\right)$,

$y = x + \dfrac{1}{x} \; (y \ge 2)$, $y = \sin x + \cos x \; (-\sqrt{2} \le y \le \sqrt{2})$,

Пример 2.1 При каких значениях параметра p уравнение $(p-4)9^x + (p+1)3^x + 2p - 1 = 0$ не имеет решений?

Комментарии. Пусть $y = 3^x > 0$. Новое условие: При каких значениях параметра уравнение $(p-4)y^2 + (p+1)y + 2p - 1 = 0$ не имеет положительных решений? Уравнение может вообще не иметь решений, а может иметь решения, но не положительные.
Возможны следующие варианты:

1) $p - 4 = 0$, т.е. уравнение превращается в линейное $5t + 7 = 0 \Rightarrow t = \dfrac{-7}{5} < 0.$

2) $p - 4 \ne 0$

2.1 $D < 0$, уравнение вообще не имеет решений;

2.2 $D \ge 0$ и решения не положительные

Рассмотрим эти случаи.

$$D = (p+1)^2 - 4(p-4)(2p-1) = -7p^2 + 38p - 15 = -(7p-3)(p-5).$$

2.1: $D<0 \Rightarrow p<\frac{3}{7}, p>5.$

2.2: При $p-4>0$

$$D\geq 0, f(0)\geq 0, x_b<0 \Rightarrow -\frac{3}{7}\leq p\leq 5,\ 2p-1\geq 0, -\frac{p+1}{p-4}<0 \Rightarrow p>4.$$

При $p-4<0$

$$D\geq 0, f(0)\leq 0, x_b<0 \Rightarrow 2p-1\geq 0, -\frac{p+1}{p-4}<0, -\frac{3}{7}\leq p\leq 5 \Rightarrow \varnothing$$

Ответ: $p<\frac{3}{7}, p\geq 4.$

Пример 2.2 При каких значениях параметра a уравнение $5^{2x}-10^x+4^{x-1}(a-2)=0$ имеет единственное решение?

Комментарии. Легко заметить, что уравнение легко сводится к квадратному заменой $t=\frac{5^x}{2^x}>0.$

Новое условие: При каких значениях параметра уравнение $t^2-t+\frac{a-2}{4}=0$ имеет единственное положительное решение.

Возможны следующие варианты решения задачи:

1) $D=0,$ т.е. уравнение имеет единственное решение и оно положительное.

2) $D\geq 0,$ но одно из решений не положительное.

Рассмотрим эти случаи.

$$D=3-a=0 \Rightarrow a=3 \Rightarrow t^2-1+\frac{1}{4}=0 \Rightarrow t=\frac{1}{2}>0.$$

$D=a-3\geq 0, f(0)=\frac{a-2}{4}<0 \Rightarrow a\leq 2.$ *Ответ:* $a\leq 2, a=3.$

Пример 2.3 При каких значениях параметра a уравнение $7^{2x}-2\cdot 21^x+(2a-1)9^x=0$ имеет единственное решение?

Ответ: $a\leq 0{,}5,\ a=1.$

Пример 2.4 При каких значениях параметра a неравенство $(a-1)9^x-(2a-1)3^x-1=0$ имеет два различных корня?
Ответ: $a\geq 1$.

Пример 2.5 При каких значениях параметра a неравенство $a9^x+4(a-1)3^x+a>1$ справедливо для всех x? *Ответ:* $a<-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример 2.6 При каких значениях параметра a уравнение $4^x+2^{x+2}+7=a-4^{-x}-2\cdot 2^{1-x}$ имеет решение? *Ответ:* $[17;\infty)$.

Пример 2.7 При каких значениях параметра a уравнение $9^{-|x-2|}-4\cdot 3^{-|x-2|}-a=0$ имеет два различных корня?

Комментарии. Пусть $y=3^{-|x-2|}$ $(0<y\leq 1)$. Новое условие: При каких значениях параметра уравнение $y^2-4y-a=0$ имеет только один корень из промежутка $(0;1]$? Тогда уравнение $y=3^{-|x-2|}$ будет иметь два корня.

1) $D=16+4a=0\Rightarrow a=-4\Rightarrow t^2-4t+4=0\Rightarrow t=2>1\Rightarrow\varnothing$.

2) $D>0$, но только один корень из отрезка $(0;1]$.

$D=16+4a>0\ \Rightarrow f(0)\cdot f(1)<0\Rightarrow a(a+3)<0\Rightarrow -3<a<0$.

Если $D=0\Rightarrow a=0, a=-3$.

При $a=0$ уравнение имеет вид $t^2-4t=0\Rightarrow t=0, t=4\Rightarrow\varnothing$.

При $a=-3$ уравнение имеет вид $t^2-4t+3=0\Rightarrow t=3, t=1$

Ответ: $-3\leq a<0$.

Пример 2.8 Найдите все значения параметра a, при которых значения функции $y=a4^x+(a+2)2^x+2$ не положительны для всех x из промежутка $[0;1]$.

Комментарии. Сделаем замену переменных $t=2^x$ $(0\leq x\leq 1\Rightarrow 1\leq t\leq 2)$. *Ответ:* $a\leq -2$.

Пример 2.9 При каких значениях параметра a неравенство $4^{\cos x}-2(a-3)\,2^{\cos x}+a+3>0$ выполняется для всех x ?

Ответ: $a<\dfrac{19}{3}$.

Пример 2.10 При каких значениях параметра b уравнение $2(b^2+1)\cos^2 x+4b^2\cos x+1=0$ не имеет решений?

Комментарии. Сделаем замену переменных $y=\cos x\,(|\,y\,|\le 1)$. Новое условие: При каких значениях параметра уравнение $2(b^2+1)y^2+4b^2y+1=0$ не имеет корней из промежутка $[-1;1]$.

1) $D<0,$ уравнение вообще не имеет решений;

2) $D>0,$ но корни не принадлежат интервалу $\left[-1;1\right]$

$D=16b^4-8(b^2+1)=8(2b^4-b^2-1)=8(2b^2+1)(b^2-1).$

$D<0\ \Rightarrow\ b^2<1$

$D>0\ \Rightarrow b^2>1$ и отрезок $\left[-1;1\right]$ должен либо лежать справа от параболы, либо внутри параболы, либо слева от параболы. Рассмотрим эти случаи.

- $f(1)=6b^2+3>0,\ f(-1)=3-2b^2$, поэтому второй случай невозможен.

- $f(-1)=3-2b^2>0, x_b=\dfrac{-b^2}{b^2+1}<-1\Rightarrow\varnothing$

- $f(1)=6b^2+3>0,\ x_b=\dfrac{-b^2}{b^2+1}>1\Rightarrow\varnothing$

- $D=0\Rightarrow b^2=1\Rightarrow 4t^2+4t+1=0\Rightarrow t=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow b^2=1.$

Ответ: $|\,b\,|\le 1.$

Пример 2.11 При каких значениях параметра a уравнение $(a^2+1)\sin^2 x+2a^2\sin x+\dfrac{1}{2}=0$ имеет хотя бы одно решение?

Ответ: $|a\,|\ge 1.$

Пример 2.12 При каких значениях параметра a уравнение $\sin x + \cos x + \sin x \cos x = a$ имеет решение?

Ответ: $-1 \le a \le 0{,}5 + \sqrt{2}$.

Пример 2.13 При каких значениях параметра a неравенство $\sin^6 x + \cos^6 x + a \sin x \cdot \cos x \ge 0$ выполняется для всех x?

Комментарии.

$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)$.

Сделаем замену переменных $y = \sin x \cdot \cos(|y| \le \frac{1}{2})$. *Ответ:* $|a| \le \frac{1}{2}$.

Пример 2.14 Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $a^2 + a - \sin^2 x - 2a \cos x > 1$ справедливо для любого x? *Ответ:* $a < \dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}$, $a > 2$.

Пример 2.15 Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sin^2 x - \sin x \cos x - 2\cos x^2 = a$ имеет корни.

Ответ: $a = 1$, $-\dfrac{\sqrt{10}+1}{2} \le a \le \dfrac{\sqrt{10}-1}{2}$.

Пример 2.16 Найдите множество значений функции $f(x) = 2\cos 2x + 2\cos x + 1$.

Комментарии. Сделаем замену переменных $t = \cos x$. Новое условие: Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(t) = 4t^2 + 2t - 1 = 0$ на отрезке $[-1;1]$.

Так как вершина параболы расположена в точке $x_b = -\dfrac{1}{4} \in [-1;1]$, то наименьшее значение на отрезке будет $f(x_b) = f(-\dfrac{1}{4}) = \dfrac{-5}{4}$, а наибольшее - $f(1) = 5$. *Ответ:* $[-\dfrac{5}{4}; 5]$.

Пример 2.17 Найдите множество значений функции $f(x)=2\cos 2x+2\sin x-1$. Ответ: $[-5;\frac{5}{4}]$.

Пример 2.18 При каких значениях a уравнение $\lg^2(\sin x)-2a\lg(\sin x)-a^2+2=0$ имеет решение?

Комментарии. Сделаем замену переменных $y=\lg(\sin x)<0$. Новое условие: При каких значениях параметра a уравнение $y^2-2ay-a^2+2=0$ имеет хотя бы одно отрицательное решение?

Ответ: $-\sqrt{2}\le a<-1$, $a\ge\sqrt{2}$.

Пример 2.19 Найдите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} x^2+4x-3y+3=0 \\ y^2+(5-2a)y+a^2-2a=0 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение. *Ответ:* $\frac{3}{2}-\sqrt{2}\le a<\frac{3}{2}+\sqrt{2}$.

Пример 2.20 При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{a(2^x-2)}=1-2^x$ имеет единственное решение?

Комментарии. Сделаем замену переменных $t=2^x>0, 1-t\ge 0$. Новое условие: При каких значениях параметра уравнение $(1-t)^2=a(t-2)$ имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условию $0<t\le 1$?

Ответ: $0<a\le 1$.

Пример 2.21 При каких значениях параметра a уравнения $\log_{4x}(1+ax)=\frac{1}{2}$ имеет единственное решение?

Ответ: $a<0$, $a=1$.

Пример 2.22 При каких значениях параметра a уравнения $\log_{(x+1)}ax=2$ имеет единственное решение? *Ответ*: $a<0$, $a=4$.

Пример 2.23 Найдите все значения $b<0$, при которых неравенство $2b\cos 2(x-y)+8b^2\cos(x-y)+8b^2(b+1)+5b<0$ выполняется для любых x,y.

Комментарии. Если x,y принимают все возможные значения, то $\cos(x-y)$ принимает все значения от -1 до 1. Сделаем замену переменных $\cos(x-y)=t$, $\cos 2(x-y)=2t^2-1$. Новое условие: При каких значениях b неравенство $2b(2t^2-1)+8b^2t+8b^2(b+1)<0$ выполняется для всех x на отрезке $[-1;1]$? *Ответ*: $b<-1-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, $-\dfrac{1}{2}<b<0$.

Пример 2.24 Найдите все значения параметра a, при которых для каждого x из промежутка $[1;2)$ выражение x^6-6x^3-1 не равно выражению ax^3?

Комментарии. Сделаем замену переменных $t=x^3$. Новое условие: При каких значениях параметра корни уравнения $t^2-6t-1=at$ не принадлежат отрезку $[1;8)$?

Возможны два варианта:

1) $D<0$, уравнение вообще не имеет решений;

2) $D\geq 0$, но корни не принадлежат промежутку $[1;8)$.

Но, $D=(6+a)^2+4>0$, поэтому первый случай не реализуется.

Если промежуток $[1;8)$ лежит между корнями, то

$$f(1)=-6-a<0,\ f(8)\leq 0\Rightarrow a\geq\frac{15}{8}\ \Rightarrow\ b^2<1$$

Если промежуток $[1;8)$ лежит слева от корней, то

$$f(8)\geq 0,\ x_b=\frac{6+a}{2}>8\Rightarrow a>5$$

Если промежуток $[1;8)$ справа от корней, то

$f(1)=-6-a>0,\ x_b=\dfrac{6+a}{2}<1\Rightarrow\ a<-6.$ *Ответ*: $a<-6$, $a\geq\dfrac{15}{8}$.

Пример 2.25 Найдите все значения параметра a, для которых при всех $b>0$ в интервале $(0;0{,}5)$ существуют решения уравнения $\log_2(1-x-x^2)=a\log_{1-x-x^2} 2+b$.

Комментарии. Сделаем замену переменных $y=\log_2 2(1-x-x^2)$. Так как $0<x<0{,}5$, то $\frac{1}{4}<1-x-x^2<1$ и $-2<\log_2(1-x-x^2)<0$. Новое условие: При каких значениях параметра a для любого $b>0$ уравнение $y^2-by-a=0$ имеет хотя бы один корень в интервале $(-2;\,0)$? *Ответ:* $0<a\le 4$.

Пример 2.26 При каких значениях параметра a уравнения $\log_2(4^x-a)=x$ имеет два решения? *Ответ*: $a<-0{,}25$, $a>0$.

Пример 2.27 Найдите все значения a, при которых уравнение $(a-1)\cos^2 x-(a^2+a-2)\cos x+2a^2-4a=2=0$ имеет более одного решения на отрезке $[0;\,{}^{4\pi}\!/_{3}]$. *Ответ*: $\frac{1}{3}<a\le\frac{3}{10}$; $a=1$.

Пример 2.28 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых отрезок $[-3;-1]$ целиком содержится среди решений неравенства $\frac{x-3a}{a-2x}<0$. От*вет*: $a<-6$, $a>-\frac{1}{3}$.

Пример 2.29 При каких значениях параметра a функция $y=\frac{3^{x^2}}{3^{ax-11}}$ имеет минимум при $x=6$? *Ответ*: $a=12$.

Пример 2.30 При каких значениях параметра a уравнение $27\cdot 9^{-x-\frac{3}{2}}-(a+2)\cdot 3^{-x}+(1-a)(2a+1)=0$ имеет единственное решение? *Ответ:* $a\in(-\infty;-0.5)\cup\{0\}\cup[1;\infty)$

3. Задачи повышенной сложности

В данный раздел включены задачи, в которых трудности не только технические, а логические или идейные.

Пример 3.1 При каких значениях параметра a найдутся такие значения x, что числа $2^x - a,\ -2^{-x-1}, 4^x + 4^{-x}$ образуют арифметическую прогрессию?

Комментарии.

Признак арифметической прогрессии: числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию $\Leftrightarrow$ когда $2b = a + c$.

Из признака арифметической прогрессии получаем:

$-2\dfrac{1}{2^{x+1}} = 2^x - a + 4^x + 4^{-x}$. Сделаем замену переменных

$t = 2^x + 2^{-x},\ t \ge 2,\ \ t^2 = 4^x + 4^{-x}$. Новое условие: При каких значениях параметра уравнение $t^2 + t - 2 - a = 0$ имеет хотя бы одно решение больше 2? *Ответ:* $a \ge 4$.

Пример 3.2 При каких значениях параметра a найдутся такие значения x, что числа $5^{1+x} - a,\ -\dfrac{9}{2}5^{1-x}, 25^x + 25^{-x}$ образуют арифметическую прогрессию? *Ответ:* $a \ge 48$.

Пример 3.3 Пусть $x_1, x_2 -$ корни уравнения $x^2 + 4x + a = 0$, $y_1, y_1 -$ корни уравнения $y^2 + 8y + b = 0$. Известно, что y_1, x_1, y_2, x_2 образуют арифметическую прогрессию. Найдите a, b. *Ответ:* $a = 0, b = 12$.

Пример 3.4 При каких значениях параметра a множество решений системы $\begin{cases} x^2 - (a-2)x - 2 \le y, \\ 2x + y - a \le 0 \end{cases}$ содержит отрезок $[-1;0]$ оси OX? *Ответ:* $[0;3]$.

Пример 3.5 При каких значениях параметра a множество решений системы $\begin{cases} 8x^2+4(a+2)x-4\le y, \\ 2x+3y+(a+2)\ge 0 \end{cases}$

содержит отрезок $[0;\frac{1}{2}]$ оси OX? *Ответ:* $[-2;-1]$.

Пример 3.6 При каких значениях параметра p уравнение $(2p-5{,}75)\cdot 32^{0{,}8x+0{,}4}+(11p-38)\cdot 0{,}25^{-x}+13-3p=0$ имеет ровно $(2-p)(p-4)$ решений?

Комментарии. Легко заметить, что $32^{0.4}=2^4=16$, $32^{0.8x}=(32^{\frac{4}{5}})^x=16^x=(4^x)^2$, $(0.25)^{-x}=4^x$. Сделаем замену переменных: $t=4^x$, $t>0$. Новое условие: При каких значениях параметра p уравнение $16(2p-5{,}75)\cdot t^2+(11p-38)\cdot t+13-3p=0$ имеет $(2-p)(p-4)$ положительных решений? Число решений полученного уравнения - число $(2-p)(p-4)$ может быть равно $0, 1$ или 2. Рассмотрев все случаи, можно получить ответ. *Ответ:* $p=4$.

Пример 3.7 При каких значениях параметра a наименьшее значение функции $f(x)=4^x-a\,2^{3+x}+7a^2$ на отрезке $[-2;\,0]$ отрицательно? *Ответ:* $\frac{1}{28}<a<1$.

Пример 3.8 Найдите точку с наибольшей ординатой, удовлетворяющую системе неравенств

$$\begin{cases} y-2x\ge 0 \\ -x^2+2ax-a^2+a+1-y\ge 0. \end{cases}$$

Комментарии. Второе неравенство задает множество точек плоскости, лежащих под графиком параболы $y=-x^2+2ax-a^2+a+1$. Вершины этих парабол имеют координаты $(x_b;y_b)=(a;a+1)$ и лежат на прямой $y=x+1$.

Первое неравенство системы задает множество точек плоскости над графиком прямой $y=2x$.

Если вершина параболы лежит выше прямой $y=2x$, то вершина и будет искомой точкой, а если вершина параболы лежит ниже прямой, то точкой с наибольшей ординатой будет верхняя точка пересечения прямой и параболы.

Прямые $y=2x$ и $y=x+1$ пересекаются в точке $x=1$. Таким образом, если $a\le 1$, то вершина лежит выше прямой, а

если $a>1$, то ниже. *Ответ:* $x=a(a\le 1)$, $x=a-1+\sqrt{2-a}$ $(1<a\le 2)$.

Пример 3.9 Действительные числа x, y таковы, что система $\begin{cases} x+y=2a-1, \\ x^2+y^2=a^2+2a-3 \end{cases}$ имеет единственное решение. При каких значениях a произведение xy принимает наименьшее значение?

Комментарии. Из симметрии системы следует, что если пара (x,y) - решение, то и пара

(y,x) - тоже решение. Тогда из условия единственности следует, что $x=y$. *Ответ:* $a=2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Пример 3.10 При каких значениях параметра a система $\begin{cases} x^2-(2a+1)x+a^2-3=y \\ y^2-(2a+1)y+a^2-3=x \end{cases}$ имеет единственное решение?

Ответ: $a=-2$.

Пример 3.11 Найдите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} \log_2(3-x+y)+3=\log_2(25-6x+7y) \\ y+2=(x-2a)^2+a+2x \end{cases}$ имеет ровно два решения?

Комментарии. Решим первое уравнение. $\begin{cases} 3-x+y>0 \\ 8(3-x+y)=25-6x+7y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y>x-3 \\ y=2x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-4 \\ y=2x+1. \end{cases}$ Подставим выражение y во второе уравнение. Новое условие: При каких значениях параметра оба корня уравнения $2x+3=(x-2a)^2+a+2x$ больше -4? *Ответ:* $(-1;3)$.

Пример 3.12 Найдите все значения параметра a, при которых $\underbrace{\min}_{[0;2]}(4x^2-4ax+a^2-2a+2)=3$.

Комментарии. Рассмотрим график параболы $f(x)=4x^2-4ax+a^2-2a+2$ с вершиной $x_b=\dfrac{a}{2}$. Исследуем зависимость наименьшего значения параболы на отрезке $[0;2]$ от расположения вершины параболы по отношению к этому отрезку.

Если $x_b\in[0;2]$, то $\underbrace{\min}_{[0;2]}(4x^2-4ax+a^2-2a+2)=f(\dfrac{a}{2})=3\Rightarrow$

$-2a^2+2a+1=3\Rightarrow\varnothing$.

Если $x_b<0$, то $\underbrace{\min}_{[0;2]}(4x^2-4ax+a^2-2a+2)=f(0)=3\Rightarrow$

$a^2-2a-1=0\ \Rightarrow a=1-\sqrt{2}$.

Если $x_b>2$, то $\underbrace{\min}_{[0;2]}(4x^2-4ax+a^2-2a+2)=f(2)=3\Rightarrow$

$a^2-10a+15=0\Rightarrow a=5+\sqrt{10}$. *Ответ:* $a=1-\sqrt{2},\ a=5+\sqrt{10}$.

Пример 3.13 Найдите все значения параметра a, при которых расстояние между вершинами парабол $y=2x^2+3ax+1$ и $y=x^2+ax-\dfrac{3}{8}a^2$ меньше $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. *Ответ:* $|a|<2$.

Пример 3.14 Найдите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases}(a-1)y^2-2(3a+1)y+9a=0\\ y=-\sqrt{x-3}+2\end{cases}$

имеет решение.

Комментарии. Из второго уравнения следует, что $y \le 2$. Новое условие: При каких значениях параметра a первое уравнение имеет хотя бы один корень ≤ 2. *Ответ:* $-\frac{1}{15} \le a \le 8$.

Пример 3.15 Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $ax^2 + 5x + 4a^2 + 5 = 0$ имеет только целые корни.

Комментарии. Если $a = 0$, то $x = -1$ – целое решение.

Если $a \ne 0$, то по теореме Виета $x_1 + x_2 = -\frac{5}{a}$, $x_1 x_2 = 4a + \frac{5}{a}$.

Так как x_1, x_2 - целые, то числа $\frac{5}{a}$, $4a$ - тоже целые.

Рассмотрим эти условия:

$\frac{5}{a}$ - целое $\Rightarrow a = \pm 1, \pm 5, \pm \frac{1}{n}, \pm \frac{5}{n}$;

$4a$ - целое $\Rightarrow a = \pm p, \ \pm \frac{p}{2}, \pm \frac{p}{4}$, где n, p - натуральные числа.

Так как должны выполняться оба этих условия, то возможны варианты $a = \pm 1, \pm 5, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{5}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{5}{4}$.

Доказательство заканчивается перебором всех претендентов и проверкой цело численности корней получающихся уравнений.

При $a = -\frac{1}{4}$ уравнение $x^2 - 20x - 21 = 0 \Rightarrow x_1 = 21, \ x_2 = -1$.

При $a = \frac{5}{2}$ уравнение $x^2 + 2x + 4 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = -2$.

При остальных значениях a либо дискриминант полученного уравнения отрицательный, либо корни не являются целыми числами. *Ответ:* $a = 0, -\frac{1}{4}, \frac{5}{2}$.

Пример 3.16 Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $ax^2 + 3x + 2a^2 - 3 = 0$ имеет только целые корни. *Ответ:* $a = 0, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$.

Пример 3.17 При каких значениях параметра a уравнение $\log_a^2 \sin x + \log_a \sin x - a = 0$ имеет решение.

Комментарии. Сделаем замену переменных $y = \log_a \sin x$. Так как $0 < \sin x \le 1$, то $\log_a \sin x \le 0$ при $a > 1$ и $\log_a (\sin x \ge 0$ при $a < 1$. Новые задачи:

- При каких значениях параметра $a > 1$ существует хотя бы одно неположительное решение уравнения $y^2 + y - a = 0$.
- При каких значениях параметра $0 < a < 1$ существует хотя бы одно неотрицательное решение уравнения $y^2 + y - a = 0$,

Ответ: $0 < a < 1$, $a > 1$.

Пример 3.18 Найдите все значения a, при каждом из которых числа $3a \cdot 8^a$ и $12a \cdot 8^a + 2 - 72a^2 \cdot 64^{a-0,5}$ лежат в интервалах $(1.5; 2.5)$ и $[6; 7)$.

Комментарии. Сделаем замену переменных $t = 3a \cdot 8^a$. Новое условие: При каких значениях параметра a оба числа t и $f(t) = 2 + 4t - t^2$ лежат в интервалах $(1.5; 2.5)$ и $[6; 7)$.

Из свойств параболы следует, что:

- если $t \in (1.5; 2.5)$, то $f(t) \in (5{,}75; 6]$, причем $f(2) = 6$. Условие задачи будет выполнено, если $3a \cdot 8^a = 2 \Rightarrow 8^a = \dfrac{2}{3a} \Rightarrow a = \dfrac{1}{3}$. Из свойств монотонности последнее равенство имеет единственное решение относительно параметра a;
- если $t \in [6; 7)$, то $f(t) \in (-19; -10]$ и условие исходной задачи не выполнено. *Ответ:* $a = \dfrac{1}{3}$.

Пример 3.19 Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $\sin^2 x + (p-2)^2 \sin x + p(p-2)(p-3) = 0$ имеет на отрезке $[0; 2\pi]$ ровно три корня.

Комментарии. Сделаем замену переменных $t = \sin x$, $t \in [-1;1]$. Если $|t| < 1$, то уравнение $\sin x = t$ имеет на отрезке $[0;2\pi]$ ровно два корня.

Пусть t_1, t_2 корни уравнения $t^2 + (p-2)^2 \cdot t - p(p-2)(p-3) = 0$.

Исходное уравнение имеет три корня, если:

- $t_1 = t_2 = 0 \quad \Rightarrow p_1 = 0, p_2 = 2, p_3 = 3.$
- $t_1 = 1,\ 0 < |t_2| < 1 \Rightarrow 1 + t_2 = -(p-2)^2 \Rightarrow t_2 = -1 - (p-2)^2 < -1.$
- $t_1 = -1,\ |t_2| < 1 \Rightarrow 1 - (p-2)^2 + p(p-2)(p-3) = 0,\ p = 3,\ p = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{5}.$
- $t_1 = 0,\ |t_2| > 1 \ \Rightarrow \quad p_1 = 0, p_2 = 2, p_3 = 3.$

Проверка:

- $p = 0 \Rightarrow\ t = 0, t = 4 \ \Rightarrow$ три корня,
- $p = 2 \Rightarrow\ t = 0 \quad \Rightarrow$ три корня,
- $p = 3 \Rightarrow\ t = 0, t = -1 \Rightarrow$ четыре корня,
- $p = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{5} \Rightarrow -1 + t_2 = -(p-2)^2 \Rightarrow t_2 = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} < 1 \Rightarrow$ три корня
- $p = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{5} \Rightarrow -1 + t_2 = -(p-2)^2 \Rightarrow t_2 = -\dfrac{(\sqrt{5} + 1)^2}{2} < -1 \Rightarrow$ один корень. *Ответ:* $p = 0$, $p = 2$, $p = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

Пример 3.20 Найдите число целых значений параметра a, при которых множество решений неравенства $(a-1)x^2 \le (3a+2)x + 10a$ содержит все члены некоторой возрастающей арифметической прогрессии, первым членом которой является число -8, а разность меньше или равна 6. *Ответ:* 5.

Пример 3.21 Найдите длину промежутка значений параметра a или сумму таких промежутков, если их несколько, при которых среди решений неравенства $5 - \dfrac{ax - 43}{x} \ge 0$ есть хотя бы одно трехзначное число, но нет ни одного четырехзначного числа.

Комментарии. Перепишем наше неравенство в виде $\frac{x(5-a)-43}{x} \geq 0$, решение которого легко получается из решения неравенства $(x(5-a)-43)\cdot x \geq 0$.

Если $(5-a)=0$, то множество решений неравенства $-43\cdot x \geq 0$ не удовлетворяет условию задачи.

Если $(5-a)>0$, то множество решений неравенства можно представить как параболу с корнями $x_1=0, x_2=\frac{43}{5-a}>0$. Множество точек, в которых парабола больше нуля, – два луча $(-\infty;0)$ и $(\frac{43}{5-a};\infty)$ и, условие задачи опять не выполнено.

Если $(5-a)<0$, то ветви параболы направлены вниз, а множество точек, в которых парабола больше нуля – отрезок $(0;\frac{43}{5-a})$. По условию этот отрезок содержит хотя бы одно трехзначное число, но не содержит ни одного четырехзначного числа. Т.е. a удовлетворяет неравенству $100<\frac{43}{5-a}<1000 \Rightarrow 5.043<a<5.43$, а длина промежутка значений a равна $5.43-5.043=0.387$.

Ответ: 0,387.

Пример 3.22 Найдите все значения параметра a, для которых неравенство $x^2+a^2+1<(2a+3)|x|$ не выполняется ни для одного значения x из промежутков $[-4;-2]$ или $(2;4]$. *Ответ:* $(2-\sqrt{5};4+\sqrt{11})$.

Пример 3.23 При каких значениях параметра a система неравенств $\begin{cases} x^2-7x+10\le 0, \\ 3+x-x^2\ge a \end{cases}$ имеет единственное решение?
Ответ: $a=1$.

Пример 3.24 Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(x^2-6|x|-a)^2+12(x^2-6|x|-a)+37=\cos\dfrac{18\pi}{a}$ имеет ровно два корня? *Ответ:* $a=\dfrac{9}{2}$.

Пример 3.25 Найдите все значения параметра a, при которых в множестве решений неравенства $\dfrac{8a^2x}{x}-x(x-2a-8)>16a+a^2$ нельзя расположить два отрезка длиной 2 и 5, не имеющие общих точек.
Ответ: $[1;2]\cup[3;5]\cup[6;7]$.

Пример 3.26 Найдите все значения a, при каждом из которых числа $3a\cdot 8^a$ и $6a\cdot 8^{a+1}-9a^2\cdot 64^a-53$ являются решениями неравенства $\log_{x-7,5}(\log_9\dfrac{x-20}{x-12})\ge 0$. *Ответ:* $a=\dfrac{2}{3}$.

Пример 3.27 При каких значениях параметра p уравнение $(1{,}5p-7)\cdot 32^{0,4x+0,2}+(29p-154)\cdot 0{,}125^{-\frac{x}{3}}+11p-41=0$ имеет ровно $10p-p^2-24$ решений? *Ответ:* $p=6$.

Пример 3.28 Найдите все значения параметра a, при которых наименьшее значение функции $f(x)=2ax+|x^2-8x+7|$ меньше 1.

Комментарии. "Раскроем модуль". Если $x^2-8x+7\geq 0$, то график $f(x)=x^2+2(a-4)x+7$ - парабола с ветвями, направленными вверх и координатами вершины $x_b=4-a$. А если $x^2-8x+7<0$, то график $f(x)=-x^2+2(a+4)x+7$ - парабола с ветвями, направленными вниз. Возможны два варианта расположения вершины первой параболы:

1) $4-a\in[1;7]$, т.е. $-3\leq a\leq 3$, тогда наименьшее значение будет достигаться в той точке, которая находится дальше от вершины параболы. При $0\leq a\leq 3$ наименьшее значение функции будет достигаться в точке $x=1$ и $f(1)=2a<1\Rightarrow 0\leq a<\frac{1}{2}$. При $-3\leq a\leq 0$ наименьшее значение функции будет достигаться в точке $x=7$ и $f(7)=14a<1\Rightarrow -3\leq a\leq 0$. В итоге в первом случае получаем условие $-3\leq a<\frac{1}{2}$.

2) $4-a\notin[1;7]$, т.е. $a<-3$ или $a>3$. Тогда наименьшее значение будет достигаться в вершине параболы $x_b=4-a$ и $f(4-a)=(4-a)^2+2(a-4)(4-a)+7=8a-9-a^2<1$. Отсюда получаем условие $a^2-8a+10>0\Rightarrow a<4-\sqrt{6}$ или $a>4+\sqrt{6}$. Т.е. во втором случае получим условие $a<-3$ или $a>4+\sqrt{6}$. Объединим оба варианта. *Ответ:* $a<\frac{1}{2};\ a>4+\sqrt{6}$.

Пример 3.29 При каких значениях параметра p уравнение $3\cos^2 x+p\cos x+p(p+3)=0$ имеет ровно три корня на отрезке $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.

Комментарии. Сделаем замену переменных: $t=\cos x$. Каждый корень уравнение $3t^2+p\cdot t+p(p+3)=0$ дает на отрезке $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ один или два корня уравнения $t=\cos x$.

Учитывая свойства функции $y = \cos x$, исходное уравнение будет иметь три корня, если $t_1 = 1$, а $0 \le t_2 < 1$.

Тогда корнями исходного уравнения будут $x = 0,\ x = \pm \arccos t$.

Если $t_1 = 1 -$ решение, то

$3 + p + p^2 + 3p = 0 \Rightarrow p^2 + 4p + 3 = 0 \Rightarrow p = -1, p = -3.$

$p = -1 \Rightarrow 3t^2 - t - 2 = \ \Rightarrow (3t + 2)(t - 1) = 0 \Rightarrow$ нет второго положительного решения.

$p = -3 \Rightarrow 3t^2 - 3t = 0 \Rightarrow 3t(t - 1) = 0 \Rightarrow t = 0, t = 1 \Rightarrow$ три решения исходного уравнения.

Ответ: $p = -3$.

Пример 3.30 При каких значениях параметра p уравнение $3\sin^2 x + p\sin x + p(p + 4) = 0$ имеет ровно три корня на отрезке $[0;\ \pi]$. *Ответ:* $p = -4$.

Пример 3.31 При каких значениях параметра a функция $f(x) = x^2 - 2\left|x - a^2\right| - 10x$ имеет хотя бы одну точку максимума? *Ответ:* $2 < |a| < \sqrt{6}$.

Пример 3.32 При каких значениях параметра a уравнение $2(|x-2| + |x|)^2 - 3(a-2)(|2-x| + |x|) + a^2 - 3a = 0$ имеет более трех решений?

Комментарии. Сделаем замену переменных: $t = |x - 2| + |x|$.

График функции $t = |x-2| + |x|$ – ломаная: $t = \begin{cases} 2x - 2 /\ x \le 2 \\ 2 \ /\ 0 \le x \le 2 \\ 2 - 2x /\ x \ge 2 \end{cases}.$

Уравнение $t_1 = |x - 2| + |x|$ имеет два корня, если $t_1 > 2$, имеет бесконечно много корней, если $t_1 = 2$, не имеет корней при $t_1 < 2$.

Таким образом, исходное уравнение будет иметь более трех (4 или бесконечно много) решений, если один из корней уравнения $3t^2-3(a-2)t+a^2-3a=0$ равен двум, либо уравнение имеет два корня, каждый из которых больше 2.

Если $t_1=2$ – решение, то $a^2-9a+20=0 \Rightarrow a=4, a=5.$

Если оба корня уравнения больше двух, то

$$f(2)>0, D>0, x_0=\frac{-b}{2a}>2. \quad f(2)=a^2-9a+20>0 \Rightarrow a<4, a>5;$$

$$D=(a-6)^2>0 \Rightarrow a\neq 6; \ \frac{-b}{2a}=\frac{3(a-2)}{4}>2 \Rightarrow a>\frac{14}{3}.$$

Ответ: $\{4\};[5;6);(6;\infty)$

Пример 3.33 При каких значениях параметра a уравнение $(4^x-3\cdot 2^x+3a-a^2)\cdot\sqrt{2-x}=0$ имеет ровно два различных корня?

Комментарии. Область определения данного уравнения: $x\leq 2$. Исходное уравнение имеет корень $x=2,$ поэтому уравнение $4^x-3\cdot 2^x+3a-a^2=0$ должно иметь еще один корень, $\neq 2$, лежащий в области определения. Сделаем замену переменных: $t=2^x$, причем $0<t\leq 4$. Тогда уравнение будет иметь вид: $f(t)=t^2-3t+3a-a^2=0.$ Исходное уравнение будет иметь ровно два корня в двух случаях: а) уравнение $f(t)=0$ имеет один корень, лежащий в области определения и он не равен двум; б) уравнение $f(t)=0$ имеет два корня, но только один из них лежит в области определения и не равен двум. Вычислим $D=9-4(3a-a^2)=(3-2a)^2$. Если $D=0,$ то $a=\frac{3}{2}$ и исходное уравнение имеет две различных корня: $t=2, t=\frac{3}{2}.$ Если $D>0,$ то уравнение $f(t)=0$ имеет два различных корня t_1,t_2. Если t_1 - «хороший», т.е. $0<t_1<4<t_2$, то

$f(0)>0,\ f(4)<0 \Rightarrow a\in\left(-1;0\right]\cup\left[3;4\right).$ Если t_2 -»хороший», т.е. $t_1<0<t_2<4,$ то $f(0)<0,\ f(4)>0 \Rightarrow \varnothing.$ Заметим, что если один из корней этого уравнения равен $2,$ то второй корень будет равен 1 и исходное уравнение будет иметь ровно два различных корня.

Ответ: $\left(-1;0\right],\left\{1,5\right\},\left[3;4\right).$

Пример 3.34 При каких значениях параметра a уравнение $x-2=\dfrac{(a+1)(a-5)}{x+4}$ имеет ровно один корень на промежутке $\left(-\infty;0\right)$? *Ответ:* $\left(-\infty;-1\right),\left(-1;1\right],\left\{2\right\},\left[3;5\right),\left(5,\infty\right)$

Список дополнительной литературы

1. Белоносов В.С., Фокин, М.В. Задачи вступительных экзаменов, Новосибирск: Сиб. Унив. Из-во, 2003

2. Дорофеев Г.В., Потапов М.К., Розов Н.Х. Пособие по математике для поступающих в вузы, -М.: Дрофа, 200234. ЕГЭ 2007. Математика. Учебно-тренироваочные материалы для подготовки учащихся. /ФИПИ-М.: Интеллект-Центр, 2007.

4. Колесникова С.И. Математика. Решение сложных задач ЕГЭ. – М.: Айрис-Пресс, 2007

5. Родионов Е.М. Математика. Решение задач с параметрами, -М.: Из-во НЦ ЭНАС, 2006

6. Шабунин М. И. Математика для поступающих в вузы, -М.: Бином. Лаборатория знаний, 2004

7. Чуваков В.П. Квадратичная функция. Учебно-методическое пособие: Редакционно-издательский центр НГУ, ЮФМЛ, 2008

Содержание

1. Основные свойства параболы 3

2. Решение задач с помощью замены переменных 7

3. Задачи повышенной сложности......................................15

Список дополнительной литературы 26

Содержание 27

Учебное издание

Ускользающая парабола

или
задачи, сводящиеся к квадратичным

Составитель

Чуваков Валерий Петрович
(chv@uriit.ru)

Югорский физико-математический лицей
г. Ханты-Мансийск, ул. Мира, 151